В. А. АМБАРЦУМЯН

Мутная среда с равномерным распределением источников

Отдельный оттиск из „Докладов" АН Армянской ССР,
VIII № 4, 1948 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ЕРЕВАН 1948

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
VIII 1948 4

ФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, действ. чл. АН Армянской ССР

Мутная среда с равномерным распределением источников

(Представлено 3 III 1948)

Новые методы теории рассеяния света в мутной среде, развитые нами([1,2,3]), позволяют, между прочим, представить в изящной форме точное решение задачи о мутной среде, заполняющей полупространство и состоящей из плоско-параллельных слоев с равномерным распределением источников света.

Пусть σ есть коэфициент чистого рассеяния, а $\varkappa$ коэфициент истинного поглощения, и пусть количество энергии излучаемой источниками в единице объема будет $4\pi\varepsilon(\sigma+\varkappa)$, где ε постоянная в данной среде. Примем, что индикатриса рассеяния сферическая. Наконец, как обычно, ограничимся случаем, когда отношение

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma+\varkappa}$$

является постоянным.

Ищется интенсивность выходящего с границы среды света. Эта интенсивность $I_0(\eta)$ будет зависеть от η, т. е. от косинуса угла с внешней нормалью.

Воспользуемся принципом инвариантности $I_0(\eta)$ по отношению к добавлению некоторого слоя с линейной толщиной dz и оптической толщиной $d\tau=(\sigma+\varkappa)\,dz$ поверх границы среды.

Согласно этому принципу инвариантности полная интенсивность излучения, доходящего до наблюдателя, будет в данном случае равна сумме пяти величин: 1) излучение бесконечного слоя, лежащего под $d\tau$, ослабленное при прохождении через $d\tau$, 2) прямое излучение источников, находящихся в $d\tau$, 3) та часть излучения источников, расположенных в $d\tau$, которая диффузно отражается от находящейся под $d\tau$ бесконечной среды, 4) та часть излучения находящейся под $d\tau$ бесконечной среды, которая рассеивается слоем $d\tau$ в сторону наблюдателя и 5) та часть излучения находящейся под $d\tau$ бесконечной среды, которая сначала рассеивается слоем $d\tau$ в сторону той же бесконечной среды и затем диффузно отражается от нее. Все другие члены будут порядка $d\tau^2$ и в пределе должны быть отброшены. Итак:

$$I_0(\eta)=I_0(\eta)\left(1-\frac{d\tau}{\eta}\right)+\frac{\varepsilon d\tau}{\eta}+2\varepsilon d\tau\int_0^1 r(\eta,\xi)\frac{d\xi}{\xi}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\frac{d\tau}{\eta}\int_0^1 I_0(\xi)d\xi+\lambda d\tau\int_0^1 I_0(\varsigma)d\varsigma\int_0^1 r(\eta,\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \tag{1}$$

где, как показано было в упомянутых работах, функция отражения $r(\eta,\xi)$ имеет вид

$$r(\eta,\xi)=\frac{\lambda}{4}\xi\frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta+\xi}, \tag{2}$$

причем функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\eta+\xi}. \tag{3}$$

После сокращения получаем из (1)

$$\frac{1}{\eta}I_0(\eta)=\frac{\varepsilon}{\eta}+\frac{\lambda}{2\eta}\int_0^1 I_0(\xi)d\xi+2\varepsilon\int_0^1 r(\eta,\xi)\frac{d\xi}{\xi}+\lambda\int_0^1 I_0(\varsigma)d\varsigma\int_0^1 r(\eta,\xi)\frac{d\xi}{\xi}.$$

Решение этого, неоднородного по отношению к $I_0(\eta)$ уравнения, очевидно, пропорционально ε. Поэтому представим его в виде

$$I_0(\eta)=\varepsilon u(\eta), \tag{4}$$

где $u(\eta)$ зависит лишь от η и λ и не зависит от ε. Получаем

$$u(\eta)=\left(1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 u(\xi)d\xi\right)\left\{1+2\eta\int_0^1 r(\eta,\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right\}. \tag{5}$$

Подставляя (2) в (5), имеем:

$$u(\eta)=\left(1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 u(\xi)d\xi\right)\left\{1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\eta+\xi}\right\}. \tag{6}$$

Первый множитель правой части постоянен. Обозначим его

$$B=1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 u(\xi)d\xi. \tag{7}$$

Деля (6) на (3), получаем тогда

$$u(\eta) = B\,\varphi(\eta). \tag{8}$$

Из (7) и (8) находим также значение B.

$$B = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}, \tag{9}$$

Как это следует из оценки $\int_0^1 \varphi(\eta)\,d\eta$, данной прежде [4]. Формула (7) показывает, что в рассматриваемой задаче относительное распределение интенсивностей по направлениям определяется функцией $\varphi(\eta)$. Однако, при $\lambda = 1$ множитель B обращается в бесконечность, и задача не имеет решения, так как при отсутствии поглощения не может быть стационарного режима с повсюду положительными источниками, распределенными равномерно.

Бюраканская Астрофизическая Обсерватория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, март.

Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Պղտոր միջավայր՝ հավասարաչափ բաշխված աղբյուրներով

Պղտոր միջավայրում լույսի ցրման նոր տեսությունը [1,2,3] թույլ է տալիս գտնել կիսատարածություն զբաղեցնող և հարթ զուգահեռ շերտերից բաղկացած, հավասարաչափ բաշխված աղբյուրներ ունեցող միջավայրի խնդրի գեղեցիկ և ճշգրիտ լուծում։

Լուծման ելակետ ենք ընդունում խնդրի ինվարիանտությունը՝ միջավայրի սահմանին $d\tau$ օպտիկական հաստություն ունեցող լրացուցիչ շերտի ավելացման նկատմամբ։ Այդ ինվարիանտության սկզբունքը տալիս է մեզ (5) հավասարումը $u(\eta)$ ֆունկցիայի համար։ Այդ ֆունկցիան միջավայրից դուրս եկող $I_0(\eta)$ ինտենսիվության հետ կապված է (4) բանաձևով, ըստ որում $4\pi\varepsilon(\sigma+x)$ ներկայացնում է իրենից աղբյուրների խտությունը, եթե σ-ն մաքուր ցրման, իսկ x-ն իսկական կլանման գործակիցներն են։ Հավասարման մեջ մտնող $r(\eta, \xi)$ ֆունկցիան այսպես կոչված դիֆֆուզ անդրադարձման ֆունկցիան է։

Պարզվում է, որ $I_0(\eta)$ համաչափ է հաստատուն գործակցի բազմապատկված (3) ֆունկցիոնալ հավասարման լուծումով։ Այդ լուծումը ուսումնասիրված է արդեն հեղինակի՝ լույսի դիֆֆուզ անդրադարձմանը նվիրված աշխատության մեջ։

Մաքուր ցրման դեպքում ($\lambda=1$) վերոհիշյալ գործակիցը անվերջ մեծ արժեք է ստանում։ Այդ դեպքում խնդիրը լուծում չունի։ Եվ իրոք, չի կարող առանց կլանման լինել ստացիոնար վիճակ այն դեպքում, երբ կիսատարածություն զբաղեցնող միջավայրում լույսի աղբյուրները հավասարաչափ բաշխված են դրական խտությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян.* ДАН СССР, **38**, 257, 1943. 2. *В. А. Амбарцумян.* Астрофизический журнал, **19**, 1942. 3. *В. А. Амбарцумян.* ЖЭТФ, **13**, 323, 1943. 4. *В. А. Амбарцумян.* ДАН Армянской ССР, **8**, № 3, 1948.